Modeliranje zaraze

Ima više matematičkih modela širenja zaraze, ovisno o zatvorenosti populacije, karakteru zaraze i načinu njena prenošenja, uključivanju vitalnih faktora (radjanje, umiranje), utjecaju cijepljenja itd. Skicirat ćemo neke najjednostavnije modele.

SIS model. Oznaka S dolazi od engleske riječi *suspectible*, a odnosi se na dio populacije podložen zarazi (potencijalno zarazivi). Oznaka I dolazi od engleske riječi *infected*, a odnosi se na zaražene. SIS model predpostavlja da je populacija zatvorena (nema ulaska niti izlaska iz populacije), ne uzima se u obzir radjanje niti umiranje, u svakom trenutku svaki član populacije je ili zaražen ili podložan zarazi (nema stvaranja imuniteta). Uvedimo oznake:
t- vrijeme,
$S(t)$ - broj podložnih zarazi u vremenu t;
$I(t)$ - broj zaraženih u trenutku t.
Razmotrimo promjenu u malom vremenskom intervalu $[t, t+\Delta t]$ duljine Δt.
$S(t+\Delta t) - S(t) := \Delta S(t)$
= - zaraženi u tom intervalu + ozdravljeni u tom intervalu
$\approx -\beta S(t)I(t)\Delta t + \alpha I(t)\Delta t$.
Drugi pribrojnik je jasan, u malom vremenskom intervalu, broj ozdravljenih približno je proporcionalan duljini Δt tog intervala i broju zaraženih $I(t)$ na početku tog intervala, koeficijent proporcionalnosti je neka pozitivna konstanta α (ovisna o populaciji i o karakteru zaraze).
Prvi je pribrojnik manje jasan, ali se može izvesti uz neke predpostavke . Intuitivno, broj zaraženih u malom vremenskom intervalu, proporcionalan je i duljini intervala i broju zaraženih i broju izloženih zarazi, a koeficijent proporcionalnosti je neka pozitivna konstata β (ovisna o populaciji, zarazi, učestalosti kontakata izmedju zdravih i zaraženih, vjerojatnosti zaraze pri kontaktu itd.). Dijeljenjem s Δt dobije se

$$\frac{\Delta S(t)}{\Delta t} \approx -\beta S(t)I(t) + \alpha I(t).$$

Prelaskom na limes kad $\Delta t \to 0$ i izostavljanjem oznake t, dobijemo

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \alpha I.$$

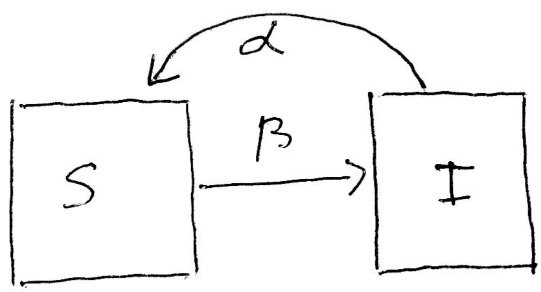
Potpuno analogno se dobije

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I$$

(to proizlazi iz toga što je ukupna populacija N konstantna, $S(t)+I(t) = N$ za sve t, pa je $\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} = 0$, tj. $\frac{dI}{dt} = -\frac{dS}{dt}$).
Spajajući ove dvije jednadžbe dobivamo dinamički sustav koji modelira ponašanje zaraze u ovim uvjetima

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \alpha I, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I. \tag{1}$$

To se može ilustrirati slikom 1.



Sl. 1

Iako bi se ovo moglo razmatrati kao sustav, sve postaje jasnije ako se u drugoj jednadžbi zamijeni $S = N - I$ pa, umjesto sustava,dobijemo samo jednu jednadžbu:

$$\frac{dI}{dt} = \beta(N-I)I - \alpha I,$$

koja je logistička jer se može zapisati kao

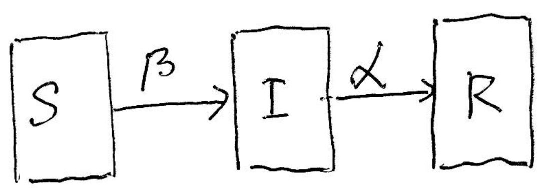
$$\frac{dI}{dt} = (\beta N - \alpha)I(1 - \frac{I}{N - \frac{\alpha}{\beta}}) \tag{2}$$

(vidimo da $\beta N - \alpha$ ima ulogu vitalnog koefcijenta, a $N - \frac{\alpha}{\beta}$ ulogu nosivog kapaciteta. Zaključujemo, da, prema ovom modelu, broj zaraženih ide prema nosivom kapacitetu i tamo se stabilizira (jedan postotak populacije ostaje trajno zaražen), što je logično, jer nema imuniteta.

SIR model. Ovaj model se primjenjuje pri uvjetima iz SIS modela, uz jednu razliku: oni koji prebole zarazu ostaju trajno imuni. Zato se uvodi nova oznaka:
$R(t)$ - broj oporavljenih (*recovered*)- oni postaju imuni i više ne mogu zaraziti.
Slično kao i u SIS metodi dobijemo sustav

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I, \quad \frac{dR}{dt} = \alpha I, \tag{3}$$

što ilustrira slika 2.



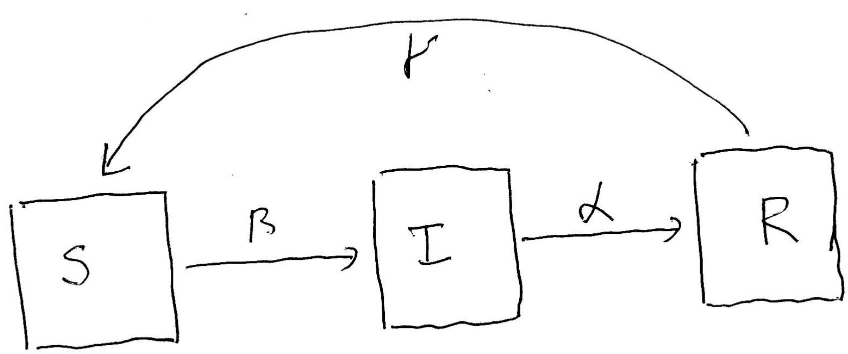
Sl. 2

Dakle, druga jednadžba ostaje kao i u SIS modelu. Takodjer, imuni nastaju samo od zaraženih koji su ozdravili i možemo predpostaviti da je brzina ozdravljenja proporcionalna broju zaraženih. Zato je razumno predpostaviti gornju treću jednadžbu. Slično se dobije i prva, tako da se prvoj iz SIS metode izostavi dio koji dolazi od ozdravljenih (ta se jednadžba može dobiti iz drugih dviju i tako da se uzme u obzir da je $S(t) + I(t) + R(t) = N$ za sve t, tj. ukupna populacija je stalna, pa je $\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$). Ovo je sustav od triju diferencijalnih jednadžba, ali treća je zavisna od prvih dviju. Zato je dovoljno gledati samo prve dvije

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I, \tag{4}$$

u kojima su varijable S, I, a za svaki t, veličina R se odredi iz S, I formulom $R(t) = N - S(t) - I(t)$.

SIRS model. U ovom modelu, dopuštamo da oporavljeni nakon nekog vremena gube imunitet. Logično je da se to odvija brzinom koja je proporcionalna veličini R, sa stalnim koeficijentom proporcionalnosti γ (sl. 3.).



Sl. 3

Zato u sustavu (8) treba korigirati prvu i treću jednadžbu dodavanjem, odnosno oduzimanjem γR, dok druga ostaje nepromijenjena:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma R, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I, \quad \frac{dR}{dt} = \alpha I - \gamma R. \tag{5}$$

Kako je i ovdje ukupna populacija konstantna, mogu se gledati samo prve dvije jednadžbe, uz zamjenu $R = N - S - I$ u prvoj jednadžbi (gdje je N stalna vrijednost populacije), pa se dobije dvodimenzijski sustav

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma(N - S - I), \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I. \tag{6}$$

Uključivanje radjanja i umiranja. Svaki od gornjih modela mogu se korigirati tako da se uzme u obzir radjanje i umiranje unutar populacije. Najjednostavniji takvi modeli jesu oni u kojima predpostavljamo da su brzine radjanja i umiranja proporcionalne veličini populacije (i neovisne o zarazi koju modeliramo). Napisat ćemo korigirane formule za SIRS model, a za ostale se može postupiti analogno

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma R + \rho N - \mu S, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I - \mu I, \quad \frac{dR}{dt} = \alpha I - \gamma R - \mu R. \tag{7}$$

Tu ρN dolazi od radjanja u populaciji, dok se redom oduzimanje $\mu S, \mu I, \mu R$ odnosi na umiranje unutar pojedine grupe (a ukupno, na umiranje u populaciji). I ovdje je $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ za svaki t, ali $N(t)$ nije nužno konstanta. Zbrajanjem jednadžba dobijemo

$$\frac{d(S+I+R)}{dt} = \rho N - \mu(S+I+R), \text{ tj. } \frac{dN}{dt} = (\rho - \mu)N,$$

pa N nije konstanta (već se ponaša prema ekponencijalnom zakonu) osim za $\rho = \mu$. Može izgledati malo nerealno da se kretanje populacije ponaša prema eksponecijalnom zakonu, ali to ima smisla u relativno kratkom vremenskom intervalu za vrijeme trajanja zaraze. Uočimo da se ovaj sustav od triju jednadžba ne može svesti na sustav dviju autonomnih za $\rho \neq \mu$. To bitno povećava njegovu složenost. Istina, iz jednadžbe $\frac{dN}{dt} = (\rho - \mu)N$ može se odrediti N u funkciji vremena: $N(t) = N(0)e^{(\rho-\mu)t}$. To uvrstimo u prvu jednadžbu tako da zamijenimo R s $N - I - S$ i odbacimo treću. Tako dobijemo dvodimenzijski neautonomni sustav (prva jednadžba eksplicitno ovisi o t).

Slučaj jednakih stopa radjanja i umiranja. Jednostavniji model dobije se uz predpostavku da su stope umiranja i radjanja jednake, tj. ako je $\rho = \mu$. Tada sustav postaje

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma R + \mu(N - S), \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - (\alpha + \mu)I, \quad \frac{dR}{dt} = \alpha I - (\gamma + \mu)R. \tag{8}$$

Ovdje je, opet, $S(t) + I(t) + R(t) = N$ (stalna vrijednost populacije) za sve t, pa se sustav može reducirati na dvije jednadžbe zamjenom $R = N - S - I$ u prvoj jednadžbi i izostavljanjem treće.

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI - (\gamma + \mu)S - \gamma I + (\gamma + \mu)N, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - (\alpha - \mu)I. \tag{9}$$